決定性Kプッシュダウン記号nテーププッシュダウンオートマトンの実時間計算に関する一考察 (オートマトン理論と数理言語の研究)

大山口, 通夫; 本多, 波雄

数理解析研究所講究録
213巻 1974年 15-31

決定性Kプッシュダウン記号nテープブッシュダウンオートマトンの実時間計算に関する一考察

東北大学 電気通信研究所 大山口 通夫
本 多 波 雄

あらまし、プッシュダウンテープの本数とプッシュダウンテープ記号の個数両方に制限をつけた機械のクラスを考え，実時間計算のもとで異なるクラス間の計算能力の比較を論ずる。また実時間多テープチューリング機械と実時間多テーププッシュダウンオートマトンの関係が述べられる。

1．序論

種々の計算機械モデルが実時間のもとで定義できる言語または異なる機械間の計算能力の比較などは盛んに研究されている。 本論文は決定性実時間nテープブッシュダウンオートマトン（r n-pda）において $n \geq 2$ のとき C_{pn} = { r n-pda が受理する集合のクラス} と $C_{p(n+1)}$ との間に真の包含関係があるかどうかの問題に動機づけられている。本論文では主にプッシュダウンテープ記号の個数とテープの本数両方に制限をつけて C^{K}_{pn} = { テープ記号の集合の元の数がK個以

内という制限のもとでの rn-pda が受理する集合のクラス}を定義してその異なる C^{K}_{pn} 間の包含関係を調べている。この理由は次の2つが考えられる。①K＝1の場合はカウンタ機械となりこれは文献4で調べられているがカウンタ機械を拡張したクラスにおいて計算能力に違いがあるかどうか調べることは興味ある問題である。②C_{pn} と $C_{p(n+1)}$ との間に真の包含関係があるかどうかの問題は任意の K_2 に対して $C^{K_2}_{p(n+1)} \subseteq C^{K_1}_{pn}$ となる K_1 が存在するかどうかの問題に置換えられる。
〈主な結果〉は $K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, n \geq 2$ のとき $(n-1)/(n+1) < \log K_2/\log K_1 < 1$ が成立するならば $C^{K_1}_{pn}$ と $C^{K_2}_{p(n+1)}$ とは比較不可能となる。また②の意味では任意の $K_2 \geq 2$ に対して $x=(n+1)/(n-1)$ とすると $K_2^{x} > K_1$ を満足するどんな K_1 に対しても（$C^{K_2}_{p(n+1)} \subseteq C^{K_1}_{pn}$）とはならないにとどまる。もう1つの結果として C_n ＝{実時間 n テープチューリング機械が受理する集合のクラス}と C_{pn} との関係を述べる。ここでは以下のことが述べられる；すべての n に対して C_{pn} と $C_{p(n+1)}$ とに計算能力の違いがあるかどうか知ることができるならば，有限個を除いたすべての n に対して，C_n と C_{n+1} とに計算能力の違いがあるかどうか知ることができる（逆も真）。とくに任意の $n \geq 2$ に対し $C_{pn} \subsetneq C_{p(n+1)}$ という命題と任意の $n \geq 2$ に対し $C_n \subsetneq C_{n+1}$ という命題は等価である。

2. 定義

〔定義1〕決定性実時間nテーププッシュダウンオートマトン（r n-pda）とは以下のことが成立する8組$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, z_0, n \rangle$である。(1) Q, Σ, Γはそれぞれ状態，入力記号，テープ記号の有限集合，$z_0 \in \Gamma$は初期記号，$q_0 \in Q$は初期状態，$F \subseteq Q$，nは正整数である。(2) δは$Q \times \Sigma \times \Gamma^n$から$Q \times (\Gamma^*)^n$への関数である。次に関係$\vdash$を$(q, aw, y_1A_1, \cdots, y_nA_n) \vdash (q', w, y_1z_1, \cdots, y_nz_n) \Leftrightarrow \delta(q, a, A_1, \cdots, A_n) = (q', z_1, \cdots, z_n)$と定義する（但し$q, q' \in Q$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$, $A_i \in \Gamma$, $y_i, z_i \in \Gamma^*$）。$\overset{*}{\vdash}$を$\vdash$の反射的かつ推移的閉包とする。Mが受理する言語L(M)は$\{ w \in \Sigma^* \mid \exists f \in F, y_1, \cdots, y_n \in \Gamma^* \ (q_0, w, z_0, \cdots, z_0) \overset{*}{\vdash} (f, \Lambda, y_1, \cdots, y_n) \}$で与えられる。r n-pdaが受理する言語のクラスをC_{pn}と書く。

［定義2］r n-pda Mにおいてテープ初期記号z_0は計算の途中ではテープから取り去ることも新しくつけ加えることもないという条件を入れる。（すなわちテープの底を表現するためにだけあると考える） 正確に書けば$\delta(q, a, A_1, \cdots, A_n) = (q', y_1, \cdots, y_n)$とすると$y_i \in \{z_0\} \cdot \{\Gamma - \{z_0\}\}^* \cup \{\Gamma - \{z_0\}\}^*$が成立しかつ$y_i \in \{z_0\} \cdot \{\Gamma - \{z_0\}\}^* \Leftrightarrow A_i = z_0$が成立する。　この条件が満たされるr n-pda Mにおいて$\|\Gamma - \{z_0\}\| \leq K$（K：正整数）が成立するとき$M_{pn}^K$とかく。すべての$M_{pn}^K$が受理する集合のク

ラスを C^{K}_{pn} と書く。

〔定義3〕決定性実時間 n テープチューリング機械（n-RTTM）とは rn-pda におけるプッシュダウンテープをチューリングテープに置換えた機械である。n-RTTMが受理する言語のクラスを C_n と書く。

〔記号〕$\|A\|$ で集合Aの元の個数，$|w|$ で語wの長さを示す。$w = x_1 \cdots x_K$（但し $|x_i|=1$）のとき $w^R = x_K \cdots x_1$。$pre_N(w)$ は $K \geq N$ のとき $x_1 \cdots x_N$ を示し，$K < N$ のとき $x_1 \cdots x_K$ を示す。$pre(w)$ は Λ 又は x_1 又は ⋯又は $x_1 \cdots x_K$ を示す。$\overline{pre}(w)$ は $pre(w)$ かつ w でない元を示す。（但し Λ:空語）$suf_N(w)$ は $K \geq N$ のとき $x_{K-N+1} \cdots x_K$ を示し，$K < N$ のとき $x_1 \cdots x_K$ を示す。

$\mathbb{N}$ で非負整数の集合，$\mathbb{N}^+$ で正整数の集合を示す。

$(q_0, wu, Z_0, \cdots, Z_0) \vdash^{*} (q, u, y_1, \cdots, y_n)$ のとき $M.C.(w) = (q, y_1, \cdots, y_n)$, $(M.C.(w))_K = y_K$, $(M.C.(w))_Q = q$, $suf_N(M.C.(w)) = (q, suf_N(y_1), \cdots, suf_N(y_n))$, $suf_N(M.C.(w))_K = suf_N(y_K)$ と定義する。 rn-pda M が $M.C.(w)$ の状態にあるときその時のテープの各々のヘッドの位置を原点にとり，次の入力 u で i 番目のテープヘッドの位置が原点より k 個増えている場合，$h_{M.C.(w)}(i, u) = +k$ と書く。$h_{M.C.(w)}(u) \geq k'$ と書けば $\min_{1 \leq i \leq n} h_{M.C.(w)}(i, u) \geq k'$ が成立することを意味する。

$[r]$ で実数 r の整数部分を示す。

3．結果

3.1 異なる C^{K}_{pn} 間の比較

〔定理1〕$K_1 \geq 2, K_2 \geq 2$ のとき

$\frac{m_1}{m_1+m_2} < \frac{\log K_2}{\log K_1}$ ならば $L_1 \in C^{K_2}_{p(m_1+m_2)}$ かつ $L_1 \notin C^{K_1}_{pm_1}$ なる言語 L_1 が存在する。但し $K_1, K_2, m_1 \in \mathbb{N}^+$, $m_2 \in \mathbb{N}$

〔証明〕$L_1 = \{ w_1 w_2 \cdots w_{(m_1+m_2)} C w_i^R \mid 1 \leq i \leq m_1+m_2,\ w_i \in \Sigma_i^*,$ $\|\Sigma_i\| = K_2, \forall i, j(\neq i)\ \Sigma_i \cap \Sigma_j = \phi,\ C \notin \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_{(m_1+m_2)} \}$。$L_1 \in C^{K_2}_{p(m_1+m_2)}$ は明らか。$L_1 \notin C^{K_1}_{pm_1}$ は簡単な情報蓄積容量の比較により証明される。□

〔定理2〕$K_1 \geq 2$, $K_2 \geq 2$ のとき

$\frac{m_1}{m_1+m_2} > \frac{\log K_2}{\log K_1}$ ならば $L_2 \notin C^{K_2}_{p(m_1+m_2)}$ かつ $L_2 \in C^{K_1}_{pm_1}$ なる言語 L_2 が存在する。但し $K_1, K_2, m_1 \in \mathbb{N}^+$, $m_2 \in \mathbb{N}$

〔証明〕定理1と同じ。□

$m_2 > 0$ の条件のもとで定理1より強い結果として

〔定理3〕$K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, m_1 \geq 2, m_2 > 0$ のとき

$\frac{m_1-1}{m_1+m_2} < \frac{\log K_2}{\log K_1}$ ならば $L_3 \in C^{K_2}_{p(m_1+m_2)}$ かつ $L_3 \notin C^{K_1}_{pm_1}$ なる言語 L_3 が存在する。但し $K_1, K_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

〔証明〕$L_3 = \{ w_1^{(1)} \cdots w_{m_1+m_2}^{(1)} w_1^{(2)} \cdots w_{m_1+m_2}^{(2)} w_1^{(3)} \cdots w_{m_1+m_2}^{(3)} C \cdot pre((w_i^{(1)} w_i^{(2)} w_i^{(3)})^R) \mid 1 \leq i \leq m_1+m_2,\ w_i^{(k)} \in \Sigma_i^* (k=1,2,3), \|\Sigma_i\| = K_2, \forall i, j(\neq i)\ \Sigma_i \cap \Sigma_j = \phi\quad C \notin \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_{m_1+m_2} \}$。$L_3$ は明らかに $C^{K_2}_{p(m_1+m_2)}$ の元である。すなわち $w_i^{(1)}, w_i^{(2)}, w_i^{(3)}$ の入力があるた

びにi番目のテープに蓄える。そしてCの入力があると蓄えることを止め，次の入力が $pre((w_i^{(1)}w_i^{(2)}w_i^{(3)})^R)$ であるかどうか実時間で決定することができる。一方 $L_3 \notin C_{pm_1}^{K_1}$ を言うためにまず L_3 を受理するある $M_{pm_1}^{K_1}$ が存在すると仮定して矛盾を導く。

[証明の概略] はこの仮定した $M_{pm_1}^{K_1}$ は L_3 を受理するためには少なくとも1本のテープにおいて情報を蓄積することは不可能となる。それで使用可能な情報蓄積容量の比較 $K_1^{m_1-1} < K_2^{m_1+m_2}$ により $M_{pm_1}^{K_1}$ の存在が否定される。

[$L_3 \notin C_{pm_1}^{K_1}$ の証明]　$M_{pm_1}^{K_1}$ が L_3 を受理すると仮定する。この $M_{pm_1}^{K_1}$ の状態集合 Q において $\|Q\| \le K_1^{\ell}$ (ℓ は定数)とする。

[補題3.1]　$M_{pm_1}^{K_1}$ においてまず $w_1^{(1)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(1)}$ の入力が入ってくると考える。そのとき任意の i ($1 \le i \le m_1+m_2$)に対して $|w_i^{(1)}| = N_1 - [d_1N_1]$ (N_1 は十分大きいとする) かつ $w_i^{(1)} \in \Sigma_i^*$ をみたす $w_1^{(1)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(1)}$ の異なる入力列に対して $suf_{(m_1+m_2+1)[d_1N_1]}(M.C.(w_1^{(1)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(1)}))$ が同じであるものが $K_1^{(m_1-1)N_1+[d_1N_1]}$ 個はあるような定数 $d_1 > 0$ が存在する。

[証明] $M_{pm_1}^{K_1}$ がテープの長さを $(m_1+m_2+1)[d_1N_1]$ に限ったときの可能なコンフィグレーションの数は $K_1^{m_1(m_1+m_2+1)[d_1N_1]+m_1+\ell}$ 個である。$w_1^{(1)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(1)}$ の入力が $suf_{(m_1+m_2+1)[d_1N_1]}(M.C.(w_1^{(1)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(1)}))$ の取り方によって分割されると考えたとき，その各々の類に等しく分配されるときがある1つの類に最大どれだけ入るかと

いう問題に対して最悪の分配の仕方である。また異なる入力が $K_2^{(m_1+m_2)(N_1-[d_1N_1])}=x$ 個あることにより上の補題は以下の不等式を示せばよい。$K_1^{(m_1-1)N_1+[d_1N_1]}K_1^{m_1(m_1+m_2+1)[d_1N_1]+m_1+\ell}\le x$ 。この不等式の対数をとり $\log K_2/\log K_1 = m_1-1/(m_1+m_2)+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ を代入することにより $d_1=C_3/C_1$ とおけば $d_1N_1\ge C_2$ をみたす N_1 に対して上の補題が成立する。(但し $C_1=(m_1^2+m_1m_2+m_1+1)+m_1+\varepsilon(m_1+m_2)$, $C_2=m_1+\ell$, $C_3=\varepsilon(m_1+m_2)$) 確かに $d_1>0$ である。□

補題3.1が成立している入力の集合を S_1 と定義すると,
$S_1=\{\omega_1^{(1)},\cdots\omega_{m_1+m_2}^{(1)} \mid 1\le i\le m_1+m_2, |\omega_i^{(1)}|=N_1-[d_1N_1], \omega_i\in\Sigma_i^*, \forall u_1, u_1'\in S_1\ \mathrm{suf}(m_1+m_2+1)[d_1N_1](M.C.(u_1))=\mathrm{suf}(m_1+m_2+1)[d_1N_1](M.C.(u_1'))\}$, $\|S_1\|\ge K_1^{(m_1-1)N_1+[d_1N_1]}$ となる。

[補題3.2] $M_{pm_1}^{K_1}$ が $\forall u_1\in S_1$ $\mathrm{suf}(m_1+m_2+1)[d_1N_1](M.C.(u_1))$ の状態にあるとき $\forall\omega_1^{(2)}=\omega_1^{(3)},\cdots,\omega_{m_1+m_2}^{(2)}=\omega_{m_1+m_2}^{(3)}$ (但し $1\le i\le m_1+m_2$ $|\omega_i^{(2)}|=[d_1N_1]$ かつ $\omega_i^{(2)}\in\Sigma_i^*$) に対して $\exists i\ (1\le i\le m_1+m_2)$, $\exists\ell'(\in\mathbb{N}^+)$, $\exists j\ (1\le j\le m_1)$ $\omega_1^{(2)}\cdots\omega_{i-1}^{(2)}\omega_{i+1}^{(2)}\cdots\omega_{m_1+m_2}^{(2)}\cdot(\omega_i^{(3)})^{\ell'}\overline{pre}(\omega_i^{(3)})=v_2$ の入力は $h_{M.C.(u_1)}(j,v_2)=-(m_1+m_2)\cdot[d_1N_1]$ となる。但し任意の $\overline{pre}(v_2)$ に対して $h_{M.C.(u_1)}(\overline{pre}(v_2))>-(m_1+m_2)[d_1N_1]$ 。

[証明] この補題はまず $M_{pm_1}^{K_1}$ に u_1 の入力列を入れ次の入力として $|\omega_i^{(2)}|=[d_1N_1]$ であるどんな入力列の組を持ってきても適当に組み変えた(i と ℓ' に依存して) v_2 の入力は $M_{pm_1}^{K_1}$ のある j 番

目のテープヘッドの位置を初めて $-(m_1+m_2)[d_1N_1]$ にすることを言っている。この補題の証明は補題が成立しないと仮定して矛盾を導く。補題が成立しないと仮定するとある $w_1^{(2)}=w_1^{(3)}, \cdots, w_{m_1+m_2}^{(2)}=w_{m_1+m_2}^{(3)}$ （但し $|w_i^{(2)}|=[d_1N_1]$ ）において任意の i （$1\leq i\leq m_1+m_2$），任意の l'（$\in\mathbb{N}$）において $w_1^{(2)}\cdots w_{i-1}^{(2)}w_{i+1}^{(2)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(2)}(w_i^{(3)})^{l'}\cdot\overline{pre}(w_i^{(3)})=v_2''$ の入力列はどのテープヘッドの位置も $-(m_1+m_2)\cdot[d_1N_1]$ 以下にすることはない。任意の i （$1\leq i\leq m_1+m_2$）において $v^{(i)}=w_1^{(2)}\cdots w_{i-1}^{(2)}w_{i+1}^{(2)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(2)}$ と定義して，$v^{(i)}w_i^{(3)}, v^{(i)}(w_i^{(3)})^2, \cdots, v^{(i)}(w_i^{(3)})^{l''}$ の入力列を考える。ここで $l''>K_1^{m_1N_1+m_1+l}$ とする。この l'' 個の異なる入力列に対して $M_{pm_1}^{K_1}$ は各々異なるコンフィグレーションを持たねばならない。なぜなら $1\leq i_1<i_2\leq l''$ において $M.C.(u_1v^{(i)}(w_i^{(3)})^{i_1})=M.C.(u_1v^{(i)}(w_i^{(3)})^{i_2})$ とすると（$u_1=w_1^{(1)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(1)}$ より）$u_1v^{(i)}(w_i^{(3)})^{i_1}c(w_i^{(1)}(w_i^{(3)})^{i_2})^R\in L_3 \Leftrightarrow u_1v^{(i)}(w_i^{(3)})^{i_2}c(w_i^{(1)}(w_i^{(3)})^{i_2})^R\in L_3$ となり矛盾が生ずる。ゆえに l'' 通り異なるコンフィグレーションを持たねばならないことよりある f_i（$1\leq f_i\leq m_1$），ある l_i（$1\leq l_i\leq l''$）が存在して $h_{M.C.(u_1)}(f_i, v^{(i)}(w_i^{(3)})^{l_i})\geq N_1-(m_1+m_2)[d_1N_1]$ が成立する。これは仮定よりどのテープヘッドも $-(m_1+m_2)[d_1N_1]$ 以下の位置に行かないことより明らかである。また $v^{(i)}(w_i^{(3)})^{l_i}$ と f_i の対応は $m_1+m_2>m_1$ よりある i, j （$\neq i$）が存在して（$1\leq i, j\leq m_1+m_2$）$f_i=f_j$ （$1\leq f_i\leq m_1$）となる。次に以前定義した集合 S_1 の元から特別な関係を持っている 2

元を取出すのであるが, $\|S_1\| \geq K_1^{(m_1-1)N_1+[d_1N_1]}$ より f_i番目のテープ内容を除いた残りの(m_1-1)本のテープ内容においてさらに長さN_1,テープ内容が等しいS_1の異なる2元が存在する。これは残りの(m_1-1)本のテープが長さN_1に限った異なる内容は高々$K_1^{(m_1-1)N_1+(m_1-1)}$であるから$(m_1-1)<[d_1N_1]$よりS_1のある2元は同じ内容の類に入る。それである$u_1, u_1'(\neq u_1)\in S_1$が存在して任意の$k$ $(1\leq k\leq m_1$ かつ $k\neq f_i)$において $suf_{N_1+(m_1+m_2+1)[d_1N_1]}(M.C.(u_1))_k = suf_{N_1+(m_1+m_2+1)[d_1N_1]}(M.C.(u_1'))_k$ かつ $suf_{(m_1+m_2+1)[d_1N_1]}(M.C.(u_1)) = suf_{(m_1+m_2+1)[d_1N_1]}(M.C.(u_1'))$ (これはS_1の2元である条件)となる。 次の入力として$v^{(i)}(w_i^{(3)})^{\ell_i}$を考えるとこの入力列はどのテープヘッドの位置も$-(m_1+m_2)[d_1N_1]$以下にはせず$f_i$番目のテープヘッドの位置を$N_1-(m_1+m_2)[d_1N_1]$以上にすることから, $suf_{N_1+[d_1N_1]}(M.C.(u_1v^{(i)}(w_i^{(3)})^{\ell_i})) = suf_{N_1+[d_1N_1]}(M.C.(u_1'v^{(i)}(w_i^{(3)})^{\ell_i}))$ となる。$u_1 = w_1^{(1)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(1)}$, $u_1' = w_1'^{(1)}\cdots w'^{(1)}_{m_1+m_2}$とすると$u_1\neq u_1'$より ある$n$ $(1\leq n\leq m_1+m_2)$において$w_n^{(1)}\neq w_n'^{(1)}$となる。 もし$n\neq i$とすると次の入力として, $C(w_n^{(1)}w_n^{(2)})^R = y$を考えることにより, $|y| = N_1+1$から, $u_1v^{(i)}(w_i^{(3)})^{\ell_i}y\in L_3 \Leftrightarrow u_1'v^{(i)}(w_i^{(3)})^{\ell_i}y\in L_3$ となってしまい矛盾が生ずる。ゆえに$n=i$となる。今度は$v^{(i)}(w_i^{(3)})^{\ell_i}$の入力列のかわりに$v^{(j)}(w_j^{(3)})^{\ell_j}$を考えることにより, $f_i=f_j$であったから同様の議論で$suf_{N_1+[d_1N_1]}(M.C.(u_1v^{(j)}(w_j^{(3)})^{\ell_j}))=$

$suf_{N_1+[d_1N_1]}(M.C.(u_i' v^{(j)}(w_j^{(3)})^{l_j}))$ となる。$j \neq i$ より $j \neq n$ となるから，$C(w_n^{(1)} w_n^{(2)})^R = y$ の入力を考えることにより，
$u_i v^{(j)}(w_j^{(3)})^{l_j} y \in L_3 \Leftrightarrow u_i' v^{(j)}(w_j^{(3)})^{l_j} y \in L_3$ からまた矛盾が生ずる。ゆえに上の補題が成立する。□

次に $\alpha = a_1 \cdots a_n$（但し $|a_i|=1$）としたとき $A(\alpha)=\{a_{i+1}\cdots a_n a_1 \cdots a_i \mid 0 \le i \le n-1\}$ と定義し，関係～を $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow A(\alpha)\cap A(\beta) \neq \emptyset$ と定義する。$A(\alpha)\cap A(\beta)\neq\emptyset \Leftrightarrow A(\alpha)=A(\beta)$ が成立するから～は同値関係である。$w_i \in \Sigma_i^*$（但し $|w_i|=N$ かつ $\|\Sigma_i\|=K_2$）において～で分割すると１つの類に入る数は $\|A(w_i)\| \le N$ より異なる類の数は少なくとも $\frac{1}{N}\cdot K_2^N$ 個はある。$[w_i]_\sim$ を w_i の類の表示とする。$l \ge 1$ のとき $suf_N((w_i)^l \overline{pre}(w_i)) \in A(w_i)$ に注意することによって補題3.2において（$[w_1^{(2)}=w_1^{(3)}]_\sim, \cdots, [w_{m_1+m_2}^{(2)}=w_{m_1+m_2}^{(3)}]_\sim$）の（$m_1+m_2$）組の異なる入力数 $K_2^{(m_1+m_2)[d_1N_1]}\cdot 1/([d_1N_1])^{m_1+m_2} = x'$ 個のみを考える。（但し $1\le i\le m_1+m_2$　$|w_i^{(2)}|=[d_1N_1]$）

その各々の異なる組は補題3.2より適当に組み変えて（ある i（$1\le i\le m_1+m_2$）と l'（$\in\mathbb{N}^+$）が存在して），入力 $w_1^{(2)}\cdots w_{i-1}^{(2)} w_{i+1}^{(2)}\cdots w_{m_1+m_2}^{(2)}\cdot(w_i^{(3)})^{l'}\overline{pre}(w_i^{(3)})$ はある j（$1\le j\le m_1$）番目のテープヘッドを初めて $-(m_1+m_2)[d_1N_1]$ の位置にする。そのことから少なくとも $\frac{1}{m_1}\cdot x'$ 個の異なる入力の組は適当に組み変えた入力によって一定の j 番目のテープヘッドを初めて $-(m_1+m_2)[d_1N_1]$ とする。その時 $\frac{1}{m_1}x'$ 個の入力においては $M_{pm_1}^{K_1}$ は入力を読んだ後の j 番目の

テープ内容は全く同じとなる。$M^{K_1}_{pm_1}$がj番目のテープを除いて作ることができる長さ$([d_1N_1]+1)$に限った異なるコンフィグレーションの数は高々$K_1^{(m_1-1)[d_1N_1]+2(m_1-1)+\ell} = Z$個である。$[d_1N_1]$が十分大きいとき$\frac{1}{m_1}\cdot x' > Z$の不等式が成立するから（$\log K_2/\log K_1 = (m_1-1)/(m_1+m_2)+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$を代入すると上の不等式は$C_1'\cdot[d_1N_1] > C_2' + C_3' \log[d_1N_1]$となる。$C_1', C_2', C_3'$は正の定数），ある$([w_1^{(2)}=w_1^{(3)}]_\sim, \cdots, [w_{m_1+m_2}^{(2)}=w_{m_1+m_2}^{(3)}]_\sim)$と$([w_1'^{(2)}=w_1'^{(3)}], \cdots, [w_{m_1+m_2}'^{(2)}=w_{m_1+m_2}'^{(3)}]_\sim)$との異なる組が存在して（すなわちある$k$において$[w_k^{(2)}]_\sim \neq [w_k'^{(2)}]_\sim$），ある$i_1, \ell_1, i_2, \ell_2$が存在して，

$u_2 = u_1 w_1^{(2)} \cdots w_{i_1-1}^{(2)} w_{i_1+1}^{(2)} \cdots w_{m_1+m_2}^{(2)} (w_{i_1}^{(3)})^{\ell_1} \overline{pre}(w_{i_1}^{(3)})$と

$u_2' = u_1 w_1'^{(2)} \cdots w_{i_2-1}'^{(2)} w_{i_2+1}'^{(2)} \cdots w_{m_1+m_2}'^{(2)} (w_{i_2}^{(3)})^{\ell_2} \overline{pre}(w_{i_2}^{(3)})$とは

$suf_{[d_1N_1]+1}(M.C.(u_2)) = suf_{[d_1N_1]+1}(M.C.(u_2'))$が成立する。

$[w_k^{(2)}]_\sim \neq [w_k'^{(2)}]_\sim$なる$k$において$k \neq i_1$なら次の入力として$C(w_k^{(2)})^R$を考えることにより$(|C(w_k^{(2)})^R| = [d_1N_1]+1)$

$u_2 C(w_k^{(2)})^R \in L_3 \Leftrightarrow u_2' C(w_k^{(2)})^R \in L_3$となり矛盾が生ずる。

$k = i_1$ならば$suf_{[d_1N_1]}((w_{i_1}^{(3)})^{\ell_1}\overline{pre}(w_{i_1}^{(3)})) = w_{i_1}''$として

$u_2 C(w_{i_1}'')^R \in L_3 \Leftrightarrow u_2' C(w_{i_1}'')^R \in L_3$となり矛盾が生ずる。

ゆえに$L_3 \notin C^{K_1}_{pm_1}$。　これで定理3が証明された。　□

〔系3.1〕$K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, m_1 \geq 2, m_2 > 0$のとき

$\frac{m_1-1}{m_1+m_2} < \frac{\log K_2}{\log K_1} < \frac{m_1}{m_1+m_2}$ならば$C^{K_1}_{pm_1}$と$C^{K_2}_{p(m_1+m_2)}$とは比較不可能となる。　但し$K_1, K_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

〔定理4〕 $K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, m_1 \geq 2, m_2 > 0$ のとき

$m_1 + m_2 = \ell m_1 + r$ （但し $0 \leq r < m_1$, $\ell \in \mathbb{N}^+$）とするとき

$\frac{1}{\ell} \leq \frac{\log K_2}{\log K_1}$ ならば $C_{pm_1}^{K_1} \subsetneq C_{p(m_1+m_2)}^{K_2}$。（$K_1, K_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$）

〔証明〕簡単な議論と定理3から証明される。□

定理4から $m_1+m_2=\ell m_1$ が成立する特別の場合は $\frac{\log K_2}{\log K_1}$ をパラメータとしたとき定理2が比較不可能である領域の上限を与えている。しかし $m_1+m_2=\ell m_1$ の条件が成立しないとき定理2と定理4の間にはすきまが生ずる。定理5として $0<m_2<m_1$ の条件のもとで定理2よりも強い結果を示す。とくに $m_2=1$ の場合はすきまを完全に埋めている。

〔定理5〕 $K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, m_1 \geq 2, 0 < m_2 < m_1$ のとき

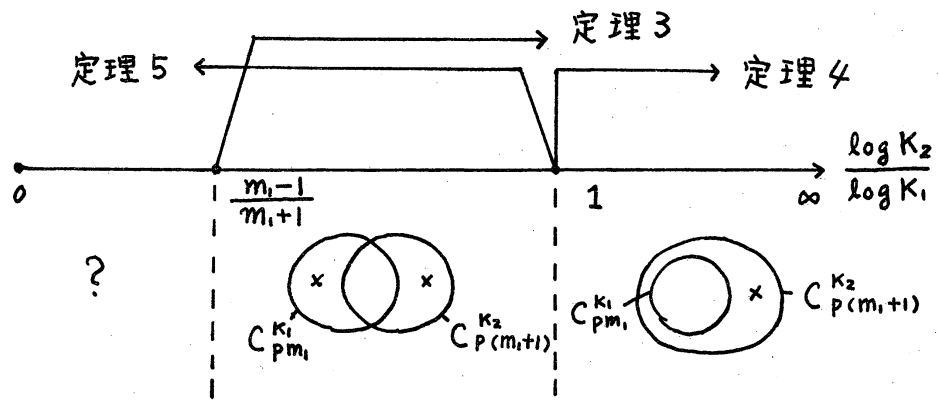
$\frac{m_1-1}{m_1+m_2-2} > \frac{\log K_2}{\log K_1}$ ならば $L_5 \in C_{pm_1}^{K_1}$ かつ $L_5 \notin C_{p(m_1+m_2)}^{K_2}$ なる言語 L_5 が存在する。但し $K_1, K_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

〔証明の概略〕 $L_5 = \{ w_1^{(1)} \cdots w_{m_1}^{(1)} w_1^{(2)} \cdots w_{m_1}^{(2)} w_1^{(3)} \cdots w_{m_1}^{(3)} w_1^{(4)} \cdots w_{m_1}^{(4)} \cdot c\,\mathrm{pre}((w_i^{(1)} w_i^{(2)} w_i^{(3)} w_i^{(4)})^R) \mid 1 \leq i \leq m_1,\ w_i^{(k)} \in \Sigma_i^*,\ \|\Sigma_i\| = K_1,\ \forall i, j\,(\neq i)\ \Sigma_i \cap \Sigma_j = \phi,\ c \notin \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_{m_1} \}$。$L_5 \in C_{pm_1}^{K_1}$ は明らか。$L_5 \notin C_{p(m_1+m_2)}^{K_2}$ を言うのはある $M_{p(m_1+m_2)}^{K_2}$ が L_5 を受理すると仮定すると1本のテープにおいて情報を蓄積することは不可能となる。それで使用可能な情報蓄積容量の比較 $K_2^{m_1+m_2-1} < K_1^{m_1}$ により $M_{p(m_1+m_2)}^{K_2}$ の存在が否定される。定理3の証明方法と似ているが細かい点で別の証明を必要とする，しかしここでは省略する。

［系5.1］ $K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, m_1 \geq 2, 0 < m_2 < m_1$ のとき

$\frac{m_1-1}{m_1+m_2} < \frac{\log K_2}{\log K_1} < \frac{m_1-1}{m_1+m_2-2}$ ならば $C^{K_1}_{pm_1}$ と $C^{K_2}_{p(m_1+m_2)}$ とは比較不可能となる。

［例5.1］今まで得られた結果により $C^{K_1}_{pm_1}$ と $C^{K_2}_{p(m_1+1)}$ とを比較すると（$K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, m_1 \geq 2$）



3.2. Cpn と Cn との関係

［定理6］ $j \geq 2$ のとき（$j \in \mathbb{N}$）

$$C_{pj} = C_{p(j+1)} \Leftrightarrow \forall i \geq j \quad C_{pi} = C_{p(i+1)}$$

$$C_j = C_{j+1} \Leftrightarrow \forall i \geq j \quad C_i = C_{i+1}$$

［証明］⇐明らか。⇒まず $C_{p2} = C_{p3}$ ならば $C_{p3} = C_{p4}$ を示す。この証明は2を任意の j（≥ 2）に置換えることによって $C_{pj} = C_{p(j+1)}$ ならば $C_{p(j+1)} = C_{p(j+2)}$ の証明になる。また $C_2 = C_3$ ならば $C_3 = C_4$ の証明も同様になされる。

［$C_{p2} = C_{p3} \Rightarrow C_{p3} = C_{p4}$ の証明］ 証明の方針は任意の $L_4 \in C_{p4}$ に対し L_4 を受理する M_{p4}（Ｙ4-pdaM）の3本のテープを2本の

テープでシュミレートすることによって $L_4 \in C_{p3}$ を言う。

〔定義 6.1〕 r n-pda M（$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, Z_0, n \rangle$）の実時間シュミレータ M'（$M' : \Sigma^* \mapsto Q \times \Gamma^n$）とは以下のことが成立する機械である。任意の m（$\in \mathbb{N}^+$）に対して $(q_0, a_1 \cdots a_m, Z_0, \cdots, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \Lambda, y_1\Gamma_1, \cdots\cdot, y_n\Gamma_n) \Leftrightarrow$ M' は $a_1 \cdots a_m$ の入力に対し m ステップで $(q, \Gamma_1, \cdots\cdot, \Gamma_n)$ を出力する。

〔補題 6.1〕 $C_{p2} = C_{p3}$ ならば任意の r 3-pda M（M_{p3}）に対し M_{p3} の実時間シュミレータ r 2-pda M（M_{p2}）が存在する。（ここでは r 2-pda を定義 1 にあるような受理機とはみないで出力を内部状態で区別した機械とみている。）

〔証明〕 $M_{p3} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, Z_0, 3 \rangle$ としたとき M_{p3} の動作をシュミレートするような言語 L' を考える。すなわち $a_1 \cdots\cdot a_{n-1}$ $[a_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, q] \in L' \Leftrightarrow (q_0, a_1 \cdots\cdot a_n, Z_0, Z_0, Z_0) \overset{*}{\underset{M_{p3}}{\vdash}} (q, \Lambda, y_1\Gamma_1, y_2\Gamma_2, y_3\Gamma_3)$。（但し $q_0, q \in Q$, $a_i \in \Sigma$, $\Gamma_i \in \Gamma$, $y_i \in \Gamma^*$, $[a_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, q]$ は長さ 1 の入力記号） $L' \in C_{p3}$ は明らかである。すなわち L' を受理する M'_{p3} は $a_1 \cdots\cdot a_{n-1}$ の入力においては M_{p3} と同じことをする。これまでのステップは受理しない。次の入力が $[a_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, q]$ ならば M_{p3} に a_n の入力を入れてその結果が q かつテープのトップ記号が順番に $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ であるかどうかみる。もし同じなら受理そうでないなら受理しない。$L' \in C_{p3}$ であるから仮定より $L' \in C_{p2}$。ゆえに L' を受理する M'_{p2} が存在す

る。次に機械M_{p2}はM'_{p2}を内蔵した機械で入力$a_1 \cdots a_n$に対して出力$(q, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$を出すものである。(但し$a_1 \cdots a_{n-1} [a_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, q] \in L'$) ここで出力は内部状態で覚えて区別する。このMp2はM'p2をシュミレートすることによって可能である。$a_1 \cdots a_{n-1}$の入力まで, M'_{p2}に入力として$a_1 \cdots a_{n-1}$を入れてシュミレートし, かつ正しい出力を出したと仮定する。次のa_nの入力を読むときM_{p2}はM'_{p2}に入力として$[a_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, q]$の形の可能な入力を考える。調べる数は$\|Q\|\|\Gamma\|^3$個であるからその結果を$M'_{p2}$には書かないで内部状態で覚えることができる。実際$M'_{p2}$が受理する入力はただ1つである。これは$L'$の定義と, M_{p3}が決定性機械であることから明らかである。M'_{p2}が受理する入力が$[a_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, q]$とわかったら$(q, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$を出力しかつ$M'_{p2}$には実際$a_n$の入力を入れてシュミレートする。このステップは$\|Q\|\|\Gamma\|^3+1$であるから1ステップに減少できる。ゆえに$a_1 \cdots a_n$の入力においても真である。$n=1$は明らかであるから帰納法で証明された。以上より$M_{p3}$の実時間シュミレータ$M_{p2}$が存在する。□

次に任意の$L_4 \in C_{p4}$においてL_4を受理する$M_{p4} = \langle Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', F', z_0', 4 \rangle$を考える。$M_{p4}$のうち3本のテープの動作に関係している$M''_{p3} = \langle Q', \Sigma'' = \Sigma' \times \Gamma', \Gamma', \delta'', q_0', -, z_0', 3 \rangle$を考える。$M''_{p3}$の動作は$M_{p4}$の4番目のテープの内容を仮定して残りの

3本のテープの動作をするものである。すなわち $\delta''(q,[a,\Gamma_4],\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)=(q',y_1,y_2,y_3) \Leftrightarrow \delta'(q,a,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4)=(q',y_1,y_2,y_3,y_4)$ (但し $q,q'\in Q'$, $a\in\Sigma'$, $\Gamma_i\in\Gamma'$, $y_i\in\Gamma'^*$, $[a,\Gamma_4]\in\Sigma''$)。このM$''_{p3}$に対して補題6.1より実時間シュミレータM''_{p2}が存在するから(すなわち $(q_0',[a_1,\Gamma_{41}]\cdots\cdots[a_n,\Gamma_{4n}],Z_0',Z_0',Z_0') \mathop{\vdash}^{*}_{M''_{p3}} (q,\Lambda,y_1'\Gamma_1,y_2'\Gamma_2,y_3'\Gamma_3) \Leftrightarrow M''_{p2}$ は $[a_1,\Gamma_{41}]\cdots\cdots[a_n,\Gamma_{4n}]$ の入力で $(q,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)$ を出力する) M_{p4}をM''_{p3}と4番目のテープとで合成した機械と考えることができるため、M''_{p3}をM''_{p2}に置き換えることによりM_{p4}と等価なM_{p3}を得ることができる。ゆえに$L_4\in C_{p3}$。これで定理6が証明された。□

[系6.1] $\forall i\geq 2 \quad C_{pi}\subsetneq C_{p(i+1)} \Leftrightarrow \forall i\geq 2 \quad C_i\subsetneq C_{i+1}$

[証明] (⇒) $\forall i\geq 2 \quad C_i\subseteq C_{p(2i)}\subsetneq C_{p(2i+1)}\subseteq C_{2i+1}$ ゆえに $C_i\subsetneq C_{2i+1}$, $C_i\subsetneq C_{2i+1}$ から定理6より $C_i\subsetneq C_{i+1}$。(⇐) $\forall i\geq 2 \quad C_{pi}\subseteq C_i\subsetneq C_{i+1}\subseteq C_{p2(i+1)}$ より $C_{pi}\subsetneq C_{p2(i+1)}$ ゆえに $C_{pi}\subsetneq C_{p(i+1)}$。□

[系6.2] $j\geq 2$のとき ($j\in\mathbb{N}$)

(i) $C_{pj}=C_{p(j+1)} \Rightarrow C_j=C_{j+1}$ かつ $C_{pj}=C_j$

(ii) $C_j=C_{j+1} \Rightarrow C_{p(2j)}=C_{p(2j+1)}$ かつ $C_j=C_{p(2j)}$

[証明] (i) $C_{pj}\subseteq C_j\subseteq C_{p(2j)}=C_{pj}$ より $C_{pj}=C_j$。同様に $C_{p(j+1)}=C_{j+1}$ ゆえに $C_j=C_{j+1}$。(ii) $C_j\subseteq C_{p(2j)}\subseteq C_{2j}=C_j$ より $C_j=C_{p(2j)}$, 同様に $C_{j+1}=C_{p(2j+2)}$ ゆえに $C_{p(2j)}=C_{p(2j+1)}$。□

定理6よりC_{pj}間の包含関係は次の2通りだけ考えられる。

3」

① $\forall i \geq 2 \ C_{pi} \subsetneq C_{p(i+1)}$ ② $\exists j \geq 2 \ C_{p2} \subsetneq \cdots \subsetneq C_{pj} = C_{p(j+1)} = \cdots$。②の場合のとき系6.2(i)より $C_j = C_{j+1} = \cdots$ が成立するが j 以下の点でわからない部分がある。例えば②の場合で $j=7$ のとき $C_2 \subsetneq C_3 \subsetneq C_4 (\subseteq C_5 \subseteq C_6 \subseteq) C_7 = C_8 = \cdots$ となり4から7までわからない。以上からM.O.RABINによって提出されたオープン問題($j \geq 2$ のとき C_j と C_{j+1} とに違いがあるかどうか?)は、有限個の j を除いた場合、$j \geq 2$ のとき C_{pj} と $C_{p(j+1)}$ とに違いがあるかどうかの問題に置換えられる。(逆も真)

[謝辞] 数多くの助言と御討論いただいた那須助教授および木村,本多両研究室の皆様に深く感謝致します。

[参考文献]

[1] M.O.RABIN *Real time computation* Israel J. Math. 1 (1963)

[2] J.HARTMANIS and R.E.STEARNS *On the computational complexity of argorithm* Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965)

[3] A.L.ROSENBERG *Real time definable languages* J.ACM (1967)

[4] P.C.FISHER, A.R.MEYER and A.L.ROSENBERG *Counter machines and counter languages* Math. Systems Theory 2 (1968)

[5] R.V.BOOK *Quasi-real time languages* Math. Systems Theory (1970)

[6] S.GREIBACH and J.HOPCROFT *Scattered context grammars* JCSS (1969)

[7] W.A.BURKHARD and P.P.VARAIYA *Complexity problems in real time languages* Information Sciences 3 (1971)